

# 保罗离子阱中离子二阶多普勒频移评估

苗胜楠<sup>1,2</sup>, 郑莹<sup>1,3</sup>, 张升康<sup>4</sup>, 陈海军<sup>5</sup>, 张建伟<sup>1,2,\*</sup>, 王力军<sup>1,2,3</sup>

(1. 时空信息精密感知技术国家重点实验室, 精密测试技术及仪器国家重点实验室, 北京 100084;

2. 清华大学精密仪器系, 北京 100084; 3. 清华大学物理系, 北京 100084;

4. 北京无线电计量测试研究所, 北京 100039; 5. 中国电子科技集团公司第十二研究所, 北京 100015)

**摘要:** 主要研究了保罗离子阱中被囚禁离子二阶多普勒频移 (The Second-order Doppler Frequency Shift, SODFS) 的评估。保罗阱中离子的运动由宏运动、微运动和额外微运动三部分组成。目前, 关于离子额外微运动的研究较少, 文中对此进行了详细研究。基于离子密度在径向均匀分布的假设, 文中提出了一种用于评估阱中温度低于 100 mK 离子系综的二阶多普勒频移的模型。该模型考虑了离子三种运动对二阶多普勒频移的贡献。通过实验以及分子动力学仿真, 验证了模型的有效性。文中提出的模型能用于评估保罗阱中被囚禁离子的二阶多普勒频移, 适用于离子光钟、离子微波钟, 尤其适用于基于大离子云的激光冷却离子微波钟。

**关键词:** 多普勒频移; 分子动力学; 离子阱

**中图分类号:** TM12

**文献标志码:** A

## Second-order Doppler Frequency Shifts of Ions in Paul Traps

MIAO Shengnan<sup>1,2</sup>, ZHENG Ying<sup>1,3</sup>, ZHANG Shengkang<sup>4</sup>, CHEN Haijun<sup>5</sup>,

ZHANG Jianwei<sup>1,2,\*</sup>, WANG Lijun<sup>1,2,3</sup>

(1. State Key Laboratory of Precision Space-time Information Sensing Technology, State Key Laboratory of Precision Measurement Technology and Instruments, Beijing 100084, China; 2. Department of Precision Instruments,

Tsinghua University, Beijing 100084, China; 3. Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

4. Beijing Institute of Radio Metrology and Measurement, Beijing 100039, China;

5. Beijing Institute of Vacuum Electronic Technology, Beijing 100015, China)

**Abstract:** The evaluation of the second-order Doppler frequency shift (SODFS) of trapped ions in Paul traps has been studied in this paper. The motion of confined ions in a Paul trap consists of three components: secular motion, micromotion, and excess micromotion. This paper focused on the ion excess micromotion, which is rarely discussed when evaluating the SODFS of ions. Based on the hypothesis that the ion density is uniformly distributed in the radial direction, a model was proposed to evaluate the total SODFS for an ion ensemble with temperature less than 100 mK in this paper, which consists of three contributions of ion motion. The effectiveness of the model has been verified by molecular dynamics simulations and experiments. The model in this paper offers advantages in accurately evaluating the SODFS for the ion trap, which is applicable for optical clocks based on ions and microwave clocks based on ions, especially those of laser-cooled ion microwave clocks based on large ion clouds.

**Keywords:** Doppler frequency shift; Molecular dynamics; Ion trap

## 0 引言

由于具有相干时间长、无外场干扰等优势,基于囚禁离子的微波钟<sup>[1-10]</sup>和光钟<sup>[11-16]</sup>受到了广泛研究。通过将<sup>199</sup>Hg<sup>+</sup>离子囚禁在线型保罗阱中并将之冷却至多普勒冷却极限温度,离子的相对二阶多普勒频移低至 $2 \times 10^{-18}$ <sup>[1]</sup>。然而,当离子阱中囚禁大量离子时,大部分离子位于偏离阱中心轴线位置处,导致离子微运动幅度增大,进而导致离子二阶多普勒频移增大。为实现高精度离子钟,必须仔细评估由离子微运动带来的二阶多普勒频移。

一个质量为 $M$ ,电荷量为 $Q$ 的离子在保罗阱中的运动由三部分组成,分别为宏运动、微运动和额外微运动<sup>[17]</sup>。其中,宏运动振幅大但频率低,微运动频率与施加的射频场频率一致,而额外微运动由射频场驱动,由离子偏离阱中心轴线产生。通常情况下,离子宏运动和微运动的能量近似相等。因此,保罗阱中被囚禁离子总的相对二阶多普勒频移可用式(1)计算<sup>[18]</sup>:

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{3 k_B T}{2 M c^2} \left( 1 + \frac{2}{3} N_d^k \right) \quad (1)$$

式中: $k_B$ ——玻尔兹曼常数; $T$ ——离子温度; $c$ ——真空中光速; $N_d^k$ ——与离子阱构型相关的参数。

当线型保罗阱中囚禁少量离子时,空间电荷效应可忽略不计, $N_d^k$ 近似为1,原因为离子平均宏运动能量与平均微运动能量近似相等且轴向不存在微运动。对于大型离子云,空间电荷效应不可忽略, $N_d^k$ 的典型值为3。然而,式(1)中未考虑离子额外微运动对于二阶多普勒频移的贡献。对于离子钟,尤其是基于大型激光冷却离子云的离子微波钟,离子额外微运动对二阶多普勒频移的贡献不可忽略。

重点研究了保罗阱中离子的额外微运动。基于离子密度在径向均匀分布的假设,文中提出了一种用于准确评估阱中温度低于100 mK离子系综的二阶多普勒频移的模型。模型的有效性通过实验以及分子动力学仿真得到了验证。

## 1 分子动力学仿真模型

分子动力学模拟是研究多体复杂系统的一种有力工具,对所有微观粒子具有普适性。文中使用的分子动力学仿真模型建立在经典的运动学基础

之上。对于保罗阱中的离子,其主要受到以下四种力的作用<sup>[19,20]</sup>:电场囚禁力 $F_i^{\text{trap}}$ ;离子间的库仑相互作用力 $F_i^{\text{Coulomb}}$ ;红失谐激光对离子的冷却作用力 $F_i^{\text{laser}}$ ;背景气体与离子的随机碰撞作用力 $F_i^{\text{stochastic}}$ 。因此,离子的动力学方程如式(2)所示:

$$M_i \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t) \\ = \mathbf{F}_i^{\text{trap}} + \mathbf{F}_i^{\text{Coulomb}} + \mathbf{F}_i^{\text{laser}} + \mathbf{F}_i^{\text{stochastic}} \quad (2)$$

式中: $i=1, 2, \dots, N$ ;  $N$ ——离子总个数; $t$ ——时间; $\mathbf{r}_i$ ——第 $i$ 个离子的位置矢量; $\mathbf{v}_i$ ——第 $i$ 个离子的速度矢量; $\mathbf{F}_i$ ——第 $i$ 个离子受到的合力矢量。

为求解式(2),模型使用Leapfrog算法,这是一种对时间可逆的二阶算法,计算总误差正比于时间迭代步长的二次方,优于一阶的欧拉算法,且计算效率高于更高阶的算法。通过选择合适的时间步长(典型值为10 ns)对式(2)进行迭代求解,在几个毫秒时间内离子系综即可达到稳定状态。在整个模拟过程中,模型可输出离子在任意时刻的位置、速度及温度信息,因此可用于计算阱中离子的二阶多普勒频移。

## 2 三段式保罗离子阱

文中实验使用三段式离子阱,其结构示意图如图1所示:它由四根直径均为14.2 mm的圆柱形电极组成(电极1,2,3,4),每根电极被分割成三部分(A,B,C)。其中,中间部分(B)的电极长度为 $2z_0 = 40$  mm,两端(A,C)电极长度均为 $2z_e = 20$  mm。电极表面到阱中心的最短距离为 $r_0 = 6.2$  mm。为实现离子囚禁,中间的四根电极为射频电极,并且其中一对对角电极施加射频电压 $U_{\text{RF}} \cos(\Omega t)$ ,而另一对电极接地,实现离子的径向囚禁;两端的八根电极为端电极,施加端电压 $U_{\text{end}}$ ,实现离子的轴向囚禁。实验中,囚禁离子的典型电参数如下:射频电压幅值为 $U_{\text{RF}} = 300$  V,射频频率为 $\Omega = 2\pi \times 2.0$  MHz,端电压为 $U_{\text{end}} = 10$  V。

实验中囚禁<sup>174</sup>Yb<sup>+</sup>离子作为目标离子,并使用波长为369 nm和935 nm的激光对离子进行激光冷却。实验中,使用深紫外相机观察到的典型离子晶体图像如图2所示:离子在阱中近似呈三维椭球状分布,且由于温度较低而呈现清晰的轮廓。然而,离子晶体图像呈现出明显的左右不对称性,主要原因是实验中使用的是自然丰度的镱元素,会产生部分镱同

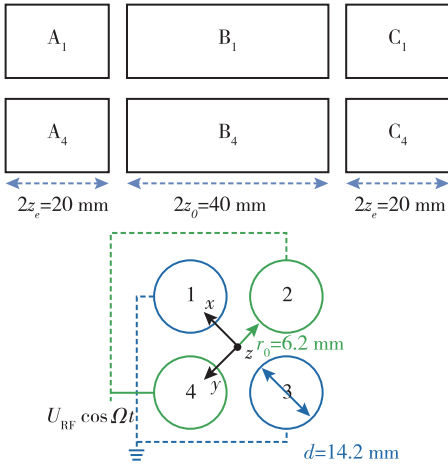
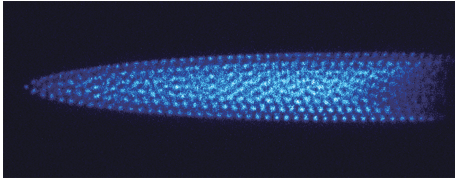


图1 线型四极保罗阱结构示意图

Fig.1 Schematic of the linear quadrupole Paul trap

位素离子,这些离子与冷却光不共振,称为“暗离子”;次要原因是实验中采用单向激光对离子进行冷却, $^{174}\text{Yb}^+$ 离子会受到沿光入射方向的光压力。

图2 由 CCD 相机拍摄的 $^{174}\text{Yb}^+$ 离子晶体图像Fig.2 A typical  $^{174}\text{Yb}^+$  ion crystal image obtained from CCD camera

### 3 离子额外微运动

根据已有文献<sup>[17,21]</sup>,当离子在保罗阱中偏离阱中心轴线分布时,它会产生额外微运动,幅度为  $qu/2$ ,其中  $q$  是一个无量纲参数, $u$  表示离子偏离阱中心轴线的平均距离。 $q$  定义如式(3)所示:

$$q = \frac{2Q U_{\text{RF}}}{M r_0^2 \Omega^2} \quad (3)$$

实验中,通过调节补偿电压可以改变离子偏离阱中心轴线的距离。实验中,最优补偿电压为 0.1 V,此时离子的额外微运动能量最低。离子偏离阱中心轴线的平均距离可以由紫外相机拍摄的离子图像以及成像系统的放大倍数推出<sup>[22]</sup>,原理如下:紫外相机拍摄得到的离子图像由离子真实图像和成像点扩散函数(Point-Spread Function, PSF)卷积得

到。假设离子真实图像以及成像点扩散函数均满足高斯分布,则离子的真实运动幅度可由式(4)计算得到:

$$\sigma^2 = \sigma_{\text{PSF}}^2 + m^2 \sigma_i^2 \quad (4)$$

式中: $\sigma$ ——成像系统所呈图像中离子的运动幅度; $\sigma_{\text{PSF}}$ ——由成像系统衍射极限导致的点扩散函数的宽度; $m$ ——成像系统的放大倍数; $\sigma_i$ ——离子真实的运动幅度, $i = x, y$ 。

实验中,成像系统的放大倍数为  $m = 5.96$ ,使用的深紫外镜头为 Nikon PF10545MF-UV,离子荧光波长为 369 nm,由此计算得到  $\sigma_{\text{PSF}} = 2.38 \mu\text{m}$ 。

如图3所示,展示了实验测得的离子偏离阱中心轴线的距离  $u$  与离子在径向  $x$  轴方向额外微运动幅度  $\sigma_x$  的关系:图中实心方块和实线分别代表原始实验数据和理论曲线,共测得了 7 组数据,每组数据均是 5 次平均的结果。由拟合结果可知,离子在径向额外微运动的幅度与离子偏离阱中心轴线的距离呈正相关关系,与文献中给出的理论结果相一致。

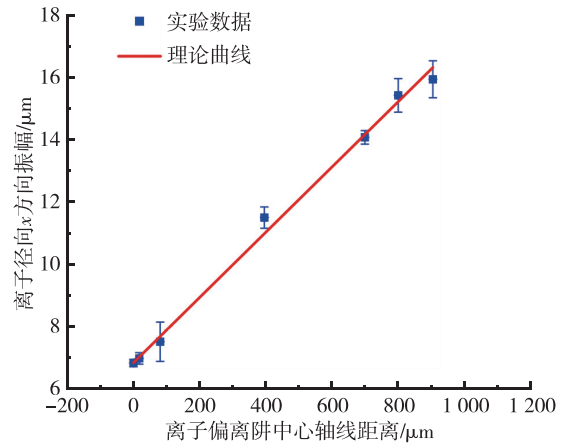


图3 离子额外微运动幅度与离子偏离阱中心轴线平均距离之间的关系

Fig.3 Relationship between the amplitude of excess micromotion and the average distance from the nodal line of the trap

### 4 离子二阶多普勒频移评估模型

根据额外微运动的实验结果,离子云中第  $i$  个离子额外微运动的平均动能可用式(5)计算,如下:

$$E_{ki} = \frac{1}{2} M_i \Omega^2 \left( \frac{\sigma_i}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{16} M_i \Omega^2 q^2 u_i^2 \quad (5)$$

因此,阱中被囚禁离子总的相对二阶多普勒频移可以根据式(6)计算,如下:

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{3 k_B T}{2 M c^2} \left( 1 + \frac{2}{3} N_d^k \right) - \frac{q^2 \Omega^2 \langle u^2 \rangle}{16 c^2} \quad (6)$$

式中: $\langle \dots \rangle$ ——所有离子的平均值。

式(6)中的三项分别代表阱中离子三种运动的贡献。其中,前两项由离子系综的温度  $T$  决定,  $N_d^k = 1$ 。在分子动力学仿真中,离子系综温度  $T$  的定义如式(7)所示:

$$T = \frac{1}{3 N k_B} M \sum_i^N \langle \bar{v}_i^2 \rangle \quad (7)$$

式中: $\bar{v}_i$ ——第  $i$  个离子在一个射频周期内宏运动速度的平均值; $\langle \dots \rangle$ ——多个射频周期的平均值。

实验中,可以通过测量离子跃迁谱线的高斯展宽获得离子系综的温度。式(6)中的第三项由离子额外微运动贡献,与离子数量以及电参数等有关。下面重点讨论式(6)中第三项的评估方法。

式(1)基于离子密度在径向方向满足玻尔兹曼分布的假设计算离子二阶多普勒频移。然而,上述假设对于高温离子云成立,对于低温离子晶体则失效。在椭球状离子晶体中,离子分层分布,呈现一层层椭球壳层,明显不满足玻尔兹曼分布。因此,基于零温带电流体模型<sup>[23-26]</sup>,假设离子密度在径向方向满足均匀分布。如图4所示,展示了同一离子系综在不同温度下的分布情况:实验中,电参数保持不变,CCD相机曝光时间为2 s,分别测量不同温度下离子系综的体积,结果显示当温度低于100 mK时,离子系综的体积基本保持不变,表明上述假设可应用于非气态的离子系综。

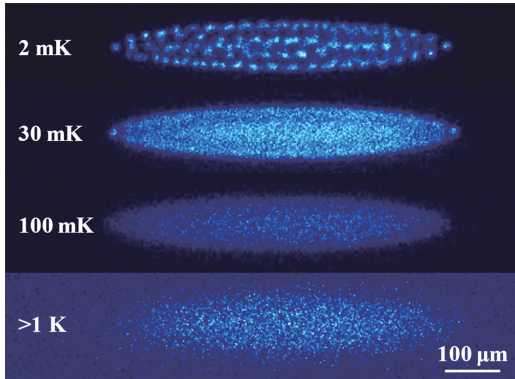


图4 同一团 $^{174}\text{Yb}^+$ 离子系综在不同温度下获取的实验图像  
Fig. 4 A series of experimental pictures of the same group of  $^{174}\text{Yb}^+$  ions at different temperatures

根据上述假设,式(6)可重写为式(8),如下:

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{3 k_B T}{2 M c^2} \left( 1 + \frac{2}{3} N_d^k \right) - \frac{q^2 \Omega^2 u_{\text{eff}}^2}{16 c^2} \quad (8)$$

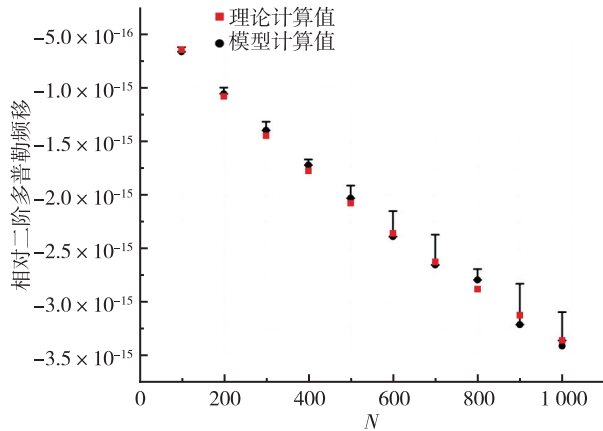
式中: $u_{\text{eff}}$ ——所有离子偏离阱中心轴线的等效距离。

参考椭球体中惯性矩的计算方式,等效距离被确定为 $u_{\text{eff}} = \sqrt{10/5} R$ ,式中  $R$  表示离子系综外椭球轮廓的径向尺寸。实验中, $R$  的测量方法如下:首先,测量得到 CCD 相机获得的离子图像单像素所代表的实际长度,然后对离子图像进行椭圆形拟合,最终可得到离子系综外轮廓的实际尺寸。图像拟合的典型误差值为实际尺寸的 10% 左右。

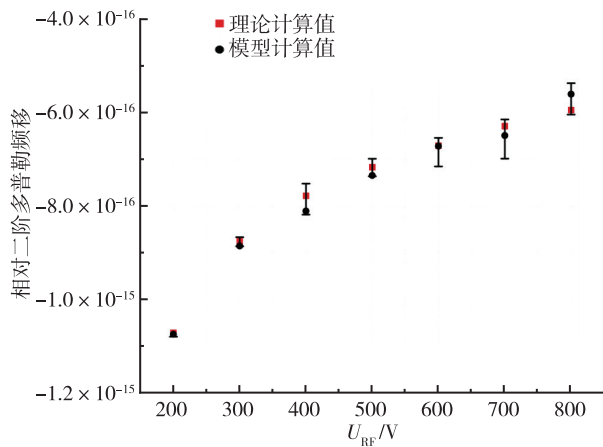
为检验式(8)中模型的有效性,文中开展了一系列分子动力学仿真实验。分子动力学仿真可记录所有离子在任意时刻的速度,因此可用于直接计算离子系综的二阶多普勒频移,计算公式为  $\Delta f/f = -\langle v^2 \rangle / (2 c^2)$ ,记作“理论计算值”;另一方面,可使用式(8)中的模型计算离子系综的二阶多普勒频移,记作“模型计算值”。在仿真过程中,利用朗之万水浴法<sup>[27-29]</sup>将离子系综的平衡态温度控制在 10 mK 左右。为了研究离子系综总的相对二阶多普勒频移与离子数  $N$  的关系,仿真实验中将电参数设定为  $U_{\text{RF}} = 400 \text{ V}$ ,  $U_{\text{end}} = 60 \text{ V}$ 。如图5(a)所示,结果显示离子系综总的相对二阶多普勒频移随着离子数  $N$  的增加而增加,这是离子系综径向尺寸增加的结果。此外,由图可知,由模型计算出的结果与理论公式计算出的结果相一致。如图5(b)和5(c)所示,展示了离子系综总的相对二阶多普勒频移与电参数的关系:增加  $U_{\text{end}}$  或者减小  $U_{\text{RF}}$  均会增加离子系综的径向尺寸,进而增大离子系综总的二阶多普勒频移,并且再次验证了模型计算结果的有效性。

此外,文中提出的模型也得到了实验数据的支持。在文献<sup>[9]</sup>中,使用式(8)中模型评估离子系综总的相对二阶多普勒频移及其不确定度,最终得到的镱-113 离子 0-0 基态超精细能级分裂频率值与之前报道的区间值相一致,而使用式(1)中模型并不符合。对于文献<sup>[6]</sup>中给出的镱-171 离子图像,拟合得到其径向尺寸为  $R = 80(5) \mu\text{m}$ 。根据文献<sup>[6]</sup>中给出的镱离子晶体温度 ( $T < 50 \text{ mK}$ ) 以及式(8)中给出的模型,计算得到镱离子微波频标总的相对二阶多普勒频移为  $-1.30(16) \times 10^{-14}$ ,与文献<sup>[6]</sup>中评估出的小于  $-2.0(0.5) \times 10^{-14}$  的结果相一致。

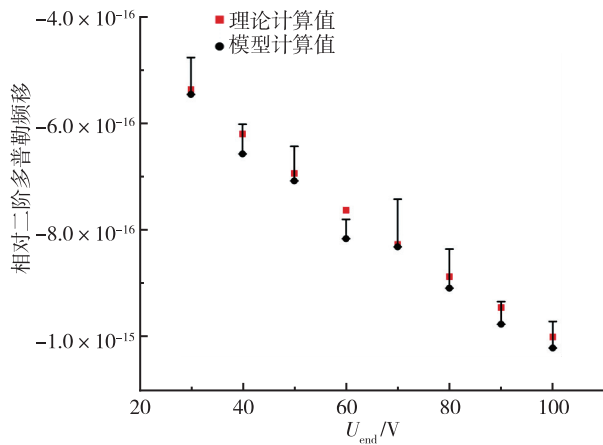




(a) 离子数与离子总的相对二阶多普勒频移的关系



(b) 射频电压与离子总的相对二阶多普勒频移的关系



(c) 端电压与离子总的相对二阶多普勒频移的关系

图5 一系列仿真实验用于验证模型的有效性

Fig.5 A series of molecular dynamics simulations performed to verify the effectiveness of the model

总之,提出的模型有效性在仿真以及实验中均得到了验证。离子额外微运动对于离子二阶多普勒频移的贡献不可忽略,尤其是对于低温离子晶体。此外,离子数以及电参数均会影响离子额外微

运动的能量,进而影响离子微波钟和离子光钟总的相对二阶多普勒频移。

## 5 结束语

通过对保罗阱中被囚禁离子的二阶多普勒频移进行了详细研究。离子在阱中的运动由三部分组成,重点研究了离子的额外微运动。基于离子密度在径向方向满足均匀分布的假设,文中提出了一种用于评估离子钟中总的相对二阶多普勒频移的模型,且模型的有效性得到了实验及仿真的验证。根据文中提出的模型,离子温度、离子数和电参数均会影响被囚禁离子总的相对二阶多普勒频移。文中提出的模型以及分析结果有利于准确评估离子钟的二阶多普勒频移,进而研制出精度更高的离子微波钟和离子光钟。

## 参考文献

- [1] WINELAND D J, BERGQUIST J C, BOLLINGER J J, et al. Progress at NIST toward absolute frequency standards using stored ions [J]. IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control, 1990, 37(6): 515-523.
- [2] BERKELAND D J, MILLER J D, BERGQUIST J C, et al. Laser-cooled mercury ion frequency standard [J]. NIST technical note, 2002 (1523): TN5-TN8.
- [3] BURT E A, PRESTAGE J D, TJOELKER R L, et al. Demonstration of a trapped-ion atomic clock in space [J]. Nature, 2021, 595(7865): 43-47.
- [4] PARK S J, MANSON P J, WOUTERS M J, et al.  $^{171}\text{Yb}^+$  microwave frequency standard [C]//2007 IEEE International Frequency Control Symposium Joint with the 21st European Frequency and Time Forum. IEEE, 2007: 613-616.
- [5] PHOONTHONG P, MIZUNO M, KIDO K, et al. Determination of the absolute microwave frequency of laser-cooled  $^{171}\text{Yb}^+$  [J]. Appl. Phys. B, 2014, 117: 673-680.
- [6] MULHOLLAND S, KLEIN H A, BARWOOD G P, et al. Laser-cooled ytterbium-ion microwave frequency standard [J]. Appl. Phys. B, 2019, 125(11): 198-209.
- [7] XIN N C, QIN H R, MIAO S N, et al. Laser-cooled  $^{171}\text{Yb}^+$  microwave frequency standard with a short-term frequency instability of  $8.5 \times 10^{-13}/\sqrt{\tau}$  [J]. Opt. Express, 2022, 30(9): 14574-14585.
- [8] MIAO K, ZHANG J W, SUN X L, et al. High accuracy

- measurement of the ground-state hyperfine splitting in a  $^{113}\text{Cd}^+$  microwave clock[J]. Opt. Lett., 2015, 40(18): 4249–4252.
- [9] MIAO S N, ZHANG J W, QIN H R, et al. Precision determination of the ground-state hyperfine splitting of trapped  $^{113}\text{Cd}^+$  ions[J]. Opt. Lett., 2021, 46(23): 5882–5885.
- [10] QIN H R, MIAO S N, HAN J Z, et al. High-performance microwave frequency standard based on sympathetically cooled ions[J]. Phys. Rev. Appl., 2022, 18(2): 024023.
- [11] BREWER S M, CHEN J S, HANKIN A M, et al.  $^{27}\text{Al}^+$  quantum-logic clock with a systematic uncertainty below  $10^{-18}$ [J]. Phys. Rev. Lett., 2019, 123(3): 033201.
- [12] HUANG Y, ZHANG B, ZENG M, et al. Liquid-nitrogen-cooled  $\text{Ca}^+$  optical clock with systematic uncertainty of  $3 \times 10^{-18}$ [J]. Phys. Rev. Appl., 2022, 17(3): 034041.
- [13] BARWOOD G P, HUANG G, KLEIN H A, et al. Agreement between two  $^{88}\text{Sr}^+$  optical clocks to 4 parts in  $10^{17}$ [J]. Phys. Rev. A, 2014, 89(5): 050501.
- [14] HUNTEMANN N, SANNER C, LIPPHARDT B, et al. Single-ion atomic clock with  $3 \times 10^{-18}$  systematic uncertainty[J]. Phys. Rev. Lett., 2016, 116(6): 063001.
- [15] ZHIQIANG Z, ARNOLD K J, KAEWUAM R, et al. Hyperfine-mediated effects in a  $\text{Lu}^+$  optical clock[J]. Phys. Rev. A, 2020, 102(5): 052834.
- [16] LIU Q, ZOU H, HE X, et al. Trapped  $\text{Hg}^+$  ion crystal generated by isotope-selective photoionization[J]. Rev. Sci. Instrum., 2019, 90(1): 013107.
- [17] BERKELAND D J, MILLER J D, BERGQUIST J C, et al. Minimization of ion micromotion in a Paul trap[J]. NIST technical note, 2002(1523): TN187–TN195.
- [18] PRESTAGE J D, TJOELKER R L, MALEKI L. Higher pole linear traps for atomic clock applications[C]//Proceedings of the 1999 Joint Meeting of the European Frequency and Time Forum and the IEEE International Frequency Control Symposium (Cat. No. 99CH36313). IEEE, 1999, 1: 121–124.
- [19] XIN N C, MIAO S N, QIN H R, et al. Research on the ions' axial temperature of a sympathetically-cooled  $^{113}\text{Cd}^+$  ion crystal[J]. Chin. Phys. B, 2021, 30(11): 113701.
- [20] MIAO S N, ZHANG J W, XIN N C, et al. Progress Towards a Microwave Frequency Standard Based on Sympathetically-cooled  $^{113}\text{Cd}^+$  Ions[C]//2022 Joint Conference of the European Frequency and Time Forum and IEEE International Frequency Control Symposium (EFTF/IFCS). IEEE, 2022: 1–4.
- [21] OFFENBERG D. Studies of trapped, cooled ion ensembles[D]. PhD dissertation, 2009.
- [22] SRIVATHSAN B, FISCHER M, ALBER L, et al. Measuring the temperature and heating rate of a single ion by imaging[J]. New J. Phys., 2019, 21(11): 113014.
- [23] HORNEKÆR L. Single-and multi-species Coulomb ion crystals: Structures, dynamics and sympathetic cooling[D]. PhD thesis, University of Aarhus, 2000.
- [24] O'NEIL T M. Centrifugal separation of a multispecies pure ion plasma[J]. Phys. Fluids, 1981, 24(8): 1447–1451.
- [25] WINELAND D J. Ion traps for large storage capacity[C]//Proceedings of the Cooling, Condensation, and Storage of Hydrogen Cluster Ions Workshop, Menlo Park. Fort Belvoir, VA: Defense Technical Information Center, 1987: 181.
- [26] HORNEKÆR L, KJÆRGAARD N, THOMMESEN A M, et al. Structural properties of two-component Coulomb crystals in linear Paul traps[J]. Phys. Rev. Lett., 2001, 86(10): 1994–1997.
- [27] CORTÉS E, WEST B J, LINDENBERG K. On the generalized Langevin equation: Classical and quantum mechanical[J]. The Journal of chemical physics, 1985, 82(6): 2708–2717.
- [28] FORD G W, KAC M. On the quantum Langevin equation[J]. J. Stat. Phys., 1987, 46: 803–810.
- [29] ATTAL S, JOYE A. The Langevin equation for a quantum heat bath[J]. J. Funct. Anal., 2007, 247(2): 253–288.